Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung der

hohen philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Dienstag, den 4. April 1882, Vormittags 10½ Uhr

in der kleinen Aula der Universität

gegen die Herren Opponenten

Friedrich Ripke, Gymnasial-Lehrer in Ohlau.
Otto Röhricht, cand. math.

öffentlich vertheidigen wird

Josef Hanel.

A. Neumann'sche Buchdruckerei (C. Ducius) Breslau, Altbüsserstrasse 42.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0075

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. E. Dorn

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Nach einer Bemerkung von Weierstrass, die Königsberger in seiner Abhandlung: „Ueber die Transformationen zweiten Grades für Abelsche Functionen erster Ordnung (Crelle. Journal Bd. 67, pag. 72 und 73) mitteilt, lassen sich hyperelliptische Functionen auf elliptische reduciren, wenn der zweite Modul der transformirten Θ-Function gleich Null gemacht werden kann. Hermite bezeichnet in seinen Untersuchungen über die Transformation hyperelliptischer Functionen (Théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes rendus 1855) die Modul der ursprünglichen Θ Fuctionen mit g, h, g^1, die der transformirten mit G, H, G^1. Es lassen sich G, H, G^1 als Functionen von g, h, g^1 darstellen; für den mittleren Modul H findet Hermite (Hermite pag. 12) die Gleichung:

$$H=\frac{(cd)_{12}+(ac)_{12}\,g+2\,[bc)_{12}-k]h+(db)_{12}\,g^1+(ab)_{12}\,(h^2-gg^1)}{(cd)_{23}+(ac)_{23}\,g+2\,(bc)_{23}\,h+(db)_{23}\,g^1+(ab)_{23}\,(h^2-gg^1)}$$

wo $(ab)_{ij} = ai\,bj - aj\,bi$ etc. ist.

Wenn H = 0 sein soll, so muss der Zähler gleich Null sein, und dieser hat die Form:

$$n_1 + n_2\,g + n_3\,h + n_4\,g^1 + n_5\,(h^2 - gg^1)$$

Man kann von der Gleichung:

1) $n_1 + n_2\,g + n_3\,h + n_4\,g^1 + n_5\,(h^2 - gg^1) = 0$

wo die n ganze Zahlen sind, ausgehen und untersuchen, ob resp. unter welchen Bedingungen sich eine Transformation finden lässt, die H = 0 macht.

Wenn die n einen gemeinsamen Faktor besitzen, so entfernt man ihn, indem man die Gleichung 1) durch ihn dividirt. Es sollen also n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 keinen gemeinsamen Faktor haben.

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} c_1\,d_2 - c_2\,d_1 &= n_1 \\ a_1\,c_2 - a_2\,c_1 &= n_2 \\ 2\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1) - k &= n_3 \\ d_1\,b_2 - d_2\,b_1 &= n_4 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 &= n_5 \end{aligned}$$

so handelt es sich darum zu zeigen, dass sich hieraus stets a_1, b_1, c_1, d_1 und a_2, b_2, c_2, d_2 so bestimmen lassen, dass auch den sonstigen zwischen ihnen bestehenden Bedingungen genügt wird.

Zwischen den Transformationscoefficienten a_0 . . . . bestehen die äquivalenten Gleichungssysteme:

$$
\begin{aligned}
&a_0\,d_1 + b_0\,c_1 - c_0\,b_1 - d_0\,a_1 = 0\\
&a_0\,d_2 + b_0\,c_2 - c_0\,b_2 - d_0\,a_2 = 0\\
&a_0\,d_3 + b_0\,c_3 - c_0\,b_3 - d_0\,a_3 = k\\
&a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - d_1\,a_2 = k\\
&a_1\,d_3 + b_1\,c_3 - c_1\,b_3 - d_1\,a_3 = 0\\
&a_2\,d_3 + b_2\,c_3 - c_2\,b_3 - d_2\,a_3 = 0
\end{aligned}
\qquad 2)
$$

(Hermite pag. 3) und:

$$
\begin{aligned}
&a_0\,b_3 + a_1\,b_2 - a_2\,b_1 - a_3\,b_0 = 0\\
&a_0\,c_3 + a_1\,c_2 - a_2\,c_1 - a_3\,c_0 = 0\\
&a_0\,d_3 + a_1\,d_2 - a_2\,d_1 - a_3\,d_0 = k\\
&b_0\,c_3 + b_1\,c_2 - b_2\,c_1 - b_3\,c_0 = k\\
&b_0\,d_3 + b_1\,d_2 - b_2\,d_1 - b_3\,d_0 = 0\\
&c_0\,d_3 + c_1\,d_2 - c_2\,d_1 - c_3\,d_0 = 0
\end{aligned}
\qquad 3)
$$

(Hermite pag. 7).

Mit Hilfe der 4. Gleichung des Systems 2) lassen sich die Gleichungen zwischen den n und den Coefficienten a, b, c, d in die Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
&c_1\,d_2 - c_2\,d_1 = n_1\\
&a_1\,c_2 - a_2\,c_1 = n_2\\
&a_1\,d_2 - a_2\,d_1 = \frac{k - n_3}{2}\\
&b_1\,c_2 - b_2\,c_1 = \frac{k + n_3}{2}\\
&d_1\,b_2 - d_2\,b_1 = n_4\\
&a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = n_5
\end{aligned}
\qquad 4)
$$

Der Transformationsgrad k ergiebt sich aus der 3. und 4. Gleichung durch Multiplication derselben mit einander; es ist nämlich:

$$(a_1\,d_2 - a_2\,d_1)\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1) = \frac{k - n_3}{2}\;\frac{k + n_3}{2}$$

gleich:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)(d_2b_1 - d_1b_2) + (c_1d_2 - c_2d_1)(a_2b_1 - a_1b_2) = \frac{k - n_3}{2}\;\frac{k + n_3}{2}$$

also:

$$-\,n_2\,n_4 - n_1\,n_5 = \frac{k - n_3}{2}\;\frac{k + n_3}{2} \qquad 5)$$

folglich:

$$k = \sqrt{n^2_3 - 4\,(n_2\,n_4 + n_1\,n_5)}$$

Da k eine ganze Zahl sein muss, so muss die Grösse unter dem Wurzelzeichen ein reines Quadrat sein. Diese Bedingung muss von den n erfüllt sein.

Aus dem Gleichungssystem 3) ergeben sich Relationen, die den Gleichungen 4) ähnlich sind, zwischen den n und den Coefficienten mit den Indices 0 und 3, nämlich:

$$
\begin{aligned}
c_3\, d_0 - c_0\, d_3 &= n_1 \\
a_3\, c_0 - a_0\, c_3 &= n_2 \\
a_0\, d_3 - a_3\, d_0 &= \frac{k + n_3}{2} \\
b_0\, c_3 - b_3\, c_0 &= \frac{k - n_3}{2} \\
b_0\, d_3 - b_3\, d_0 &= n_4 \\
a_3\, b_0 - a_0\, b_3 &= n_5
\end{aligned}
\qquad 6)
$$

Aus den Gleichungen 4) und 6) lassen sich sechszehn Relationen ableiten, die ich hier zusammenstellen will, und die später eine häufige Anwendung finden werden. Sie sind:

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ b_0\, n_1 + c_0\, n_4 - d_0 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\
&\beta)\ a_0\, n_1 + d_0\, n_2 + c_0 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\
&\gamma)\ a_0\, n_4 - d_0\, n_5 - b_0 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\
&\delta)\ c_0\, n_5 - b_0\, n_2 - a_0 \frac{k - n_3}{2} = 0
\end{aligned}
\qquad 7)
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ b_1\, n_1 + c_1\, n_4 + d_1 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\
&\beta)\ a_1\, n_1 + d_1\, n_2 - c_1 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\
&\gamma)\ a_1\, n_4 - d_1\, n_5 + b_1 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\
&\delta)\ c_1\, n_5 - b_1\, n_2 + a_1 \frac{k + n_3}{2} = 0
\end{aligned}
\qquad 8)
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ b_2\, n_1 + c_2\, n_4 + d_2 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\
&\beta)\ a_2\, n_1 + d_2\, n_2 - c_2 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\
&\gamma)\ a_2\, n_4 - d_2\, n_5 + b_2 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\
&\delta)\ c_2\, n_5 - b_2\, n_2 + a_2 \frac{k + n_3}{2} = 0
\end{aligned}
\qquad 9)
$$

$$10)\quad \begin{aligned} &\alpha)\ b_3\, n_1 + c_3\, n_4 - d_3 \frac{k - n_3}{2} = 0 \\ &\beta)\ a_3\, n_1 + d_3\, n_2 + c_3 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\ &\gamma)\ a_3\, n_4 - d_3\, n_5 - b_3 \frac{k + n_3}{2} = 0 \\ &\delta)\ c_3\, n_5 - b_3\, n_2 - a_3 \frac{k - n_3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ich beweise nun, dass die Gleichungen 4) stets in ganzen Zahlen auflösbar sind, wenn n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 ganze Zahlen sind, die der Bedingung genügen:

$$n^2_3 - 4\,(n_2\, n_4 + n_1\, n_5) = k^2$$

Ich nehme d_1 und d_2 so an, dass sie den grössten gemeinsamen Teiler χ von n_1, n_4 und $\frac{k-n_3}{2}$ enthalten, sonst aber weiter keinen besitzen. Enthielte d_1 oder d_2 einen Teiler δ von χ nicht, so würde aus den Gleichungen α, β, γ. von 8) resp. 9) folgen, dass derselbe in $\frac{k + n_3}{2}$, n_2 und n_5 enthalten sein müsste. Es hätten dann n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 einen gemeinsamen Faktor; dies ist aber der über die n gemachten Annahme zuwider. Demnach müssen d_1 und d_2 durch δ teilbar sein.

Die 1., 3. und 5. Gleichung von 4) werden nun ganzzahlig aufgelöst. Sind irgend welche Lösungen derselben

$$\alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1,\ \beta_2;\ \gamma_1,\ \gamma_2;$$

so sind alle Lösungen enthalten in:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + m_1 \frac{d_1}{\chi}, \quad \alpha_2 + m_1 \frac{d_2}{\chi}; \\ &\beta_1 + m_2 \frac{d_1}{\chi}, \quad \beta_2 + m_2 \frac{d_2}{\chi}; \\ &\gamma_1 + m_3 \frac{d_1}{\chi}, \quad \gamma_2 + m_3 \frac{d_2}{\chi}; \end{aligned}$$

wo m_1, m_2, m_3 vorläufig beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Geht man mit diesen Lösungen in die 2. Gleichung des Systems 4), so erhält man:

$$\left(\alpha_1 + m_1 \frac{d_1}{\chi}\right)\left(\gamma_2 + m_3 \frac{d_2}{\chi}\right) - \left(\alpha_2 + m_1 \frac{d_2}{\chi}\right)\left(\gamma_1 + m_3 \frac{d_1}{\chi}\right) = n_2$$

oder:

$$\alpha_1\, \gamma_2 - \alpha_2\, \gamma_1 + m_1\left(\gamma_2 \frac{d_1}{\chi} - \gamma_1 \frac{d_2}{\chi}\right) + m_3\left(\alpha_1 \frac{d_2}{\chi} - \alpha_2 \frac{d_1}{\chi}\right) = n_2$$

gleich:

$$\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1 - m_1 \frac{n_1}{\chi} + m_3 \frac{k - n_3}{2\chi} = n_2$$

Daher ist:

11) $$- m_1 \frac{n_1}{\chi} + m_3 \frac{k - n_3}{2\chi} = n_2 - (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1)$$

Ebenso erhält man aus der letzten Gleichung:

12) $$m_1 \frac{n_4}{\chi} + m_2 \frac{k - n_3}{2\chi} = n_5 - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

Damit die Gleichung 11) ganzzahlig lösbar ist, muss ein etwaiger gemeinsamer Faktor ψ von $\frac{n_1}{\chi}$ und $\frac{k - n_3}{2\chi}$ auch in $n_2 - (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1)$ enthalten sein. Dividirt man zum Nachweise hievon die Gleichung 5) durch χ, so erhält man:

$$- n_2 \frac{n_4}{\chi} - n_5 \frac{n_1}{\chi} = \frac{k - n_3}{2\chi} \cdot \frac{k + n_3}{2}$$

Es muss also der $\frac{n_1}{\chi}$ und $\frac{k - n_3}{2\chi}$ gemeinsame Faktor auch in $n_2 \frac{n_4}{\chi}$ enthalten sein, also in n_2, da $\frac{n_1}{\chi}$, $\frac{n_4}{\chi}$ und $\frac{k - n_3}{2\chi}$ keinen gemeinsamen Faktor mehr besitzen.

Ferner ist wegen der 1. und 3. Gleichung

$$\gamma_1 \frac{d_2}{\chi} - \gamma_2 \frac{d_1}{\chi} = \frac{n_1}{\chi}$$

$$\alpha_1 \frac{d_2}{\chi} - \alpha_2 \frac{d_1}{\chi} = \frac{k - n_3}{2\chi}$$

Der den rechten Seiten gemeinsame Faktor muss auch ein Faktor der Determinente $\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1$ sein, weil $\frac{d_1}{\chi}$ und $\frac{d_2}{\chi}$ relativ prim sind.

Aehnlich wird die ganzzahlige Lösbarkeit von 12) bewiesen.

Ist nun μ_1, μ_3 eine Lösung von 11), so sind, wenn p eine ganze Zahl ist, die sämmtlichen Lösungen:

$$\mu_1 + p \frac{k - n_3}{2\chi\psi}, \quad \mu_3 + p \frac{n_1}{\chi\psi}$$

Setzt man den Wert von m_1 in 12) ein, so erhält man:

$$\left(\mu_1 + p \frac{k - n_3}{2\chi\psi}\right)\frac{n_4}{\chi} + m_2 \frac{k - n_3}{2\chi} = n_5 - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

gleich:

13) $$p \frac{k - n_3}{2\chi\psi} \cdot \frac{n_4}{\chi} + m_2 \frac{k - n_3}{2\chi} = n_5 - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) - \mu_1 \frac{n_4}{\chi}$$

Damit sich aus dieser Gleichung ganzzahlige Lösungen von m_2 und p ergeben, muss die rechte Seite durch $\frac{k - n_3}{2\,\chi\,\psi}$ teilbar sein. Um dies zu zeigen, substituirt man den aus 11) folgenden Wert für μ_1, nämlich:

$$\mu_1 = \frac{-n_2 + (\alpha_1\,\gamma_2 - \alpha_2\,\gamma_1) + \mu_3 \frac{k - n_3}{2\,\chi}}{\frac{n_1}{\chi}}$$

und findet:

$$n_5 - (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1) - \mu_1 \frac{n_4}{\chi}$$

$$= n_5 - (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1) - \frac{n_4}{n_1}\left\{-n_2 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) + \mu_3 \frac{k - n_3}{2\,\chi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n_1}\left\{n_1 n_5 + n_2 n_4 - n_1\,(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - n_4\left(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 + \mu_3 \frac{k - n_3}{2\,\chi}\right)\right\}$$

Der Divisor n_1 kann ausser Acht gelassen werden, da er zu $\frac{k - n_3}{2\,\chi\,\psi}$ relativ prim ist. $n_1\,n_5 + n_2\,n_4$ ist durch $\frac{k - n_3}{2\,\chi\,\psi}$ teilbar wegen Gleichung 5), ebenso das letzte Glied. Setzt man nun in

$$-[n_1\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1) + n_4\,(\alpha_1\,\gamma_2 - \alpha_2\,\gamma_1)]$$

$\gamma_1\,d_2 - \gamma_2\,d_1$ für n_1 und $\beta_2\,d_1 - \beta_1\,d_2$ für n_4, so wird die Grösse in der Klammer gleich:

$$-(\gamma_1\,\beta_2 - \gamma_2\,\beta_1)\frac{k - n_3}{2}$$

Somit ist die Gleichung 13) nach m_2 und p ganzzahlig lösbar, da $\frac{n_4}{\chi}$ und ψ relativ prim sind.

Es sind somit die 1., 2., 3., 5. und 6. Gleichung von 4) ganzzahlig lösbar; die 4. Gleichung ist auch befriedigt, weil sie eine Folge der übrigen ist

---

Alle nicht äquivalente Transformationen werden, wenn k eine Primzahl ist, durch folgende vier Grundformen repräsentirt:

$$\text{I} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}, \qquad \text{II} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},$$

$$\text{III} \quad \left\{\begin{matrix} k & i & 0 & i^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \qquad \text{IV} \quad \left\{\begin{matrix} k & 0 & i & i^1 \\ 0 & k & i^{11} & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\},$$

worin i, i^1, i^{11} sämmtliche Werte 0, 1, 2, . . . k — 1 annehmen können. Es giebt somit $1 + k + k^2 + k^3$ Transformationsklassen (Hermite pag. 4).

Ich suche nun denjenigen Repräsentanten, mit dem für primzahlige k die Transformationen, die die hyperelliptischen Functionen auf elliptische reduciren, äquivalent sind. Da alle Transformationen, die derselben Klasse angehören, in einander übergehen, wenn man sie mit linearen Transformationen componirt, so muss, wenn die Transformation:

$$\left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\}$$

in eine der durch obige vier Grundformen repräsentirten Klassen gehören soll, sie aus dem betreffenden Repräsentanten durch Composition mit einer linearen Transformation erhalten werden.

Ich untersuche zunächst, welchen Bedingungen die Coefficienten a_0 . . . . . und somit auch die n unterworfen sein müssen, damit die Transformation in die von der ersten Grundform repräsentirten Klasse gehört. Es muss sein:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\}$$

Die Coefficienten der linearen Transformation α_0 . . . . genügen den Gleichungen 2) und 3) entsprechenden Gleichungen, in denen aber k durch 1 zu ersetzen ist.

Führt man die Composition auf der linken Seite aus und setzt die entsprechenden Coefficienten auf beiden Seiten gleich, so erhält man:

$$\begin{matrix} \alpha_0 = a_0, & \beta_0 = b_0, & k\gamma_0 = c_0, & k\delta_0 = d_0 \\ \alpha_1 = a_1, & \beta_1 = b_1, & k\gamma_1 = c_1, & k\delta_1 = d_1 \\ \alpha_2 = a_2, & \beta_2 = b_2, & k\gamma_2 = c_2, & k\delta_2 = d_2 \\ \alpha_3 = a_3, & \beta_3 = b_3, & k\gamma_3 = c_3, & k\delta_3 = d_3 \end{matrix}$$

Alle c und d sind somit Vielfache von k und somit, wie man leicht einsieht, wenn man die Werte der Coefficienten c

und d in die Gleichungen 4) und 6) substituirt, auch n_1, n_2 und n_4. Aus der Gleichung 5), die man schreiben kann:

$$k^2 + 4\,(n_1\,n_5 + n_2\,n_4) = n_3{}^2$$

ist ferner ersichtlich, dass, da die linke Seite durch k teilbar ist, auch n_3 durch k teilbar sein muss. Nun besitzen $n_3{}^2$ und $k^2 + 4\,n_2\,n_4$ den Faktor k^2, daher muss auch $4\,n_1\,n_5$ Vielfaches von k^2 sein. n_5 darf, da die n keinen gemeinsamen Faktor besitzen sollen, k nicht enthalten; daher muss n_1 durch k^2 teilbar sein.

Wenn also die Transformation mit der 1. Grundform äquivalent sein soll, so muss

$$\begin{aligned} n_1 &\equiv 0 \pmod{k} \\ n_2 &\equiv 0 \pmod{k} \\ n_4 &\equiv 0 \pmod{k} \end{aligned}$$

sein.

Erfüllen umgekehrt n_1, n_2, n_4 diese Bedingung, so können die Transformationen auch nur in die durch die 1. Grundform repräsentirte Klasse gehören; denn aus der Gleichung 5) folgt sofort, dass auch n_3 Vielfaches von k und n_1 von k^2 sein muss, da n_5 den Faktor k nicht enthalten darf. Aus den Gleichungen δ) von 7), 8), 9), 10) geht hervor, dass c_0, c_1, c_2, c_3 Vielfache von k sind, ebenso sind vermöge der Gleichungen α) auch d_0, d_1, d_2, d_3, durch k teilbar, weil $b_\varkappa\,n_1 + c_\varkappa\,n_4$, worin $\varkappa = 0, 1, 2, 3$ ist den Faktor k^2 besitzen.

Sollen die Transformationen einer der durch die 2. Grundform repräsentirten Klassen angehören, so müssen sie gleich gesetzt werden können:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix} \asymp \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix}$$

(Die Coefficienten der linearen Transformationen bezeichne ich der Einfachheit wegen immer mit denselben Buchstaben; bei jeder Composition mit von einander verschiedenen Repräsentanten haben sie aber verschiedene Werte.).

Durch Ausführung der Composition erhält man als notwendige Bedingung:

$$\begin{Bmatrix} \overset{\alpha_0}{\beta_0\,k + \gamma_0\,i} & \overset{\alpha_1}{\beta_1\,k + \gamma_1\,i} & \overset{\alpha_2}{\beta_2\,k + \gamma_2\,i} & \overset{\alpha_3}{\beta_3 k + \gamma_3\,i} \\ \overset{\gamma_0}{\delta_0\,k} & \overset{\gamma_1}{\delta_1\,k} & \overset{\gamma_2}{\delta_2\,k} & \overset{\gamma_3}{\delta_3\,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}$$

Die Vergleichung der Coefficienten zeigt, dass die d und somit wegen der Gleichungen 4) n_1 und n_4 und der Gleichung

5) auch n_3 Vielfache von k sein müssen; dass die c dagegen nicht alle durch k teilbar sein dürfen, weil sie den entsprechenden γ gleich sind. Diese können aber keinen gemeinsamen Faktor besitzen, weil die Determinante der Transformation $\alpha_0 \ldots$ gleich Eins ist. Daher darf auch der Gleichungen δ) von 7), 8), 9), 10) wegen n_2 nicht k als Faktor enthalten.

Ferner muss sein:

$$b\varkappa = \beta\varkappa \; k + \gamma\varkappa \; i \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3$$

Führt man in diese Gleichung $c\varkappa$ statt $\gamma\varkappa$ ein, so folgt zur Bestimmung von i die Congruenz:

$$b\varkappa \equiv i \; c\varkappa \pmod{k}$$

die eine und nur eine Lösung, die kleiner als k ist, besitzt. Aus dieser Congruenz folgt:

$$b\varkappa \; c\lambda - b\lambda \; c\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

und;

$$a\varkappa \; b\lambda - a\lambda \; b\varkappa \equiv i \; (a\varkappa \; c\lambda - a\lambda \; c\varkappa) \pmod{k}$$

und als specielle Fälle:

$$n_1 \equiv 0 \text{ und } n_5 \equiv i \; n_2 \pmod{k}$$

Diese Congruenz ist nach i immer auflösbar, da n_2 zu k relativ prim ist, und i ist durch sie eindeutig bestimmt, weil $i < k$ ist.

Die Transformationen gehören somit zu einer Klasse der 2. Grundform, wenn n_1 und n_4 durch k teilbar sind, n_2 dagegen nicht.

Befriedigen nun n_1, n_4 und n_2 diese Bedingungen, so sind auch umgekehrt die Transformationen mit der 2 Grundform äquivalent. Es folgt dann nämlich aus der Gleichung 5), dass auch entweder $\frac{k - n_3}{2}$ oder $\frac{k + n_3}{2}$ durch k teilbar ist, und weil $\frac{k - n_3}{2} + \frac{k + n_3}{2} = k$ ist, so ist sowohl $\frac{k - n_3}{2}$ als auch $\frac{k + n_3}{2}$ Vielfaches von k. Die Gleichungen β) von 7), 8), 9), 10) liefern nun

$$d\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

Dass aber nicht alle c congruent Null nach dem Modul k sein können, geht aus der zweiten Gleichung von 4) und 6) hervor, weil n_2 k nicht enthält.

Damit die Transformationen mit einer Klasse der 3. Grundform äquivalent sind, muss sein:

$$\begin{Bmatrix} k & i & 0 & i^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}$$

Zwischen den Coefficienten müssen daher die Gleichungen bestehen:

$$a_\varkappa = \alpha_\varkappa\, k + \beta_\varkappa\, i + \delta_\varkappa\, i^1$$
$$b_\varkappa = \beta_\varkappa$$
$$c_\varkappa = \gamma_\varkappa\, k - \delta_\varkappa\, i$$
$$d_\varkappa = \delta_\varkappa$$

b und d dürfen also nicht sämmtlich k enthalten; i und i^1 sind eindeutige Lösungen der Congruenzen:

$$i\, d_\varkappa \equiv -\, c_\varkappa \pmod{k}$$
$$i\, b_\varkappa + i^1\, d_\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

Aus der ersten Congruenz folgt:

$$c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

daher für $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$

$$n_1 \equiv 0 \pmod{k}$$

n_4 muss zu k relativ prim sein, weil sonst nach dem Vorhergehenden die Transformationen mit der 2. Grundform äquivalent sein würden. Aus den Congruenzen:

$$i\, d_\varkappa \equiv -\, c_\varkappa \pmod{k}$$
$$i\, b_\varkappa + i^1\, d_\varkappa \equiv a_\varkappa \pmod{k}$$

folgen weiter:

$$i\,(d_\varkappa\, b_\lambda - d_\lambda\, b_\varkappa) \equiv -\,(c_\varkappa\, b_\lambda - c_\lambda\, b_\varkappa) \pmod{k}$$
$$i^1\,(b_\lambda\, d_\varkappa - b_\varkappa\, d_\lambda) \equiv (b_\lambda\, a_\varkappa - b_\varkappa\, a_\lambda) \pmod{k}$$

daher für $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$.

$$i\, n_4 \equiv \frac{k + n_3}{2} \pmod{k}$$
$$i^1\, n_4 \equiv n_5 \pmod{k}$$

Diese Congruenzen sind eindeutig lösbar, weil n_4 zu k relativ prim ist.

Ist nun $n_1 \equiv 0 \pmod{k}$, n_4 aber nicht, so sind die Transformationen auch mit der 3. Grundform äquivalent; denn die d können nicht sämmtlich k als Faktor enthalten, weil sonst auch n_4 k enthalten müsste. Ferner folgt aus den Gleichungen α) von 7), 8), 9), 10), wenn man je zwei combinirt:

$$c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

Die Grössen i und i^1 ergeben sich, da n_4 nicht k als Teiler enthält, eindeutig aus den Congruenzen:

$$i\, n_4 \equiv \frac{k + n_3}{2} \pmod{k}$$
$$i^1\, n_4 \equiv n_5 \pmod{k}$$

Wenn endlich die Transformationen zu einer Klasse der 4. Grundform gehören sollen, so müssen ihre Coefficienten die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a_\varkappa &= \alpha_\varkappa\, k + \gamma_\varkappa\, i + \delta_\varkappa\, i^1 \\ b_\varkappa &= \beta_\varkappa\, k + \gamma_\varkappa\, i^{11} + \delta_\varkappa\, i \\ c_\varkappa &= \gamma_\varkappa \\ d_\varkappa &= \delta_\varkappa \end{aligned}$$

c und d dürfen demnach nicht sämmtlich k enthalten. Ferner darf auch nicht sein:

$$c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

widrigenfalls die Transformationen mit der 3. Grundform äquivalent sein würden; somit darf auch n_1 durch k nicht teilbar sein. i, i^1, i^{11} sind Lösungen der Congruenzen:

$$\begin{aligned} a_\varkappa &\equiv c_\varkappa\, i + d_\varkappa\, i^1 \pmod{k} \\ b_\varkappa &\equiv c_\varkappa\, i^{11} + d_\varkappa\, i \pmod{k} \end{aligned}$$

Hieraus folgen:

$$\left.\begin{aligned} a_\varkappa\, d_\lambda - a_\lambda\, d_\varkappa &\equiv i\,(c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa) \\ a_\varkappa\, c_\lambda - a_\lambda\, c_\varkappa &\equiv i^1\,(d_\varkappa\, c_\lambda - d_\lambda\, c_\varkappa) \\ b_\varkappa\, c_\lambda - b_\lambda\, c_\varkappa &\equiv i\,(d_\varkappa\, c_\lambda - d_\lambda\, c_\varkappa) \\ b_\varkappa\, d_\lambda - b_\lambda\, d_\varkappa &\equiv i^{11}\,(c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa) \end{aligned}\right\} \pmod{k}$$

Daher für $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$

$$i\, n_1 \equiv \frac{k - n_3}{2}$$

$$\begin{aligned} i^1\, n_1 &\equiv -n_2 \\ i^{11}\, n_1 &\equiv -n_4 \end{aligned}$$

Diese Congruenzen ergeben für i, i^1, i^{11} eindeutige Lösungen, weil n_1 zu k relativ prim ist.

Wenn nun umgekehrt n_1 durch k nicht teilbar ist, so besagt dies eben, dass nicht alle Congruenzen;

$$c_\varkappa\, d_\lambda - c_\lambda\, d_\varkappa \equiv 0 \pmod{k}$$

erfüllt sind. Somit gehören die Transformationen zu einer Klasse der 4. Grundform. i, i^1, i^{11} folgen aus obigen Congruenzen.

Keine Transformation, welche die Reduction auf elliptische Functionen liefert, kann selbst ein Repräsentant sein. Wenn eine Transformation gleich dem durch die 1. Grundform dargestelltem Repräsentanten sein soll, so muss sein:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = 0, \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = k, & c_3 = 0, \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = k. \end{array}$$

Die n werden gleich:

$$n_1 = n_2 = n_4 = n_5 = 0, \quad n_3 = k,$$

Dieselben Werte der n ergeben sich, wenn eine Transformation gleich einem in der 2. Grundform enthaltenem Repräsentanten sein soll. In beiden Fällen nimmt die Gleichung 1) die Form an;

$$k\ h = o$$

Es müsste demnach schon der mittlere Modul der gegebenen Θ-Function gleich Null sein.

Wenn eine Transformation mit einem Repräsentanten der 3. Grundform indentisch sein soll, so müssen die Coefficienten derselben gleich sein:

$$\begin{array}{llll} a_0 = k, & a_1 = i, & a_2 = o, & a_3 = i^1, \\ b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = 0, \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = k, & c_3 = -i, \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1. \end{array}$$

Daher:

$$n_1 = n_4 = n_5 = 0,\ n_2 = i\ k,\ n_3 = k$$

Somit wird die Gleichung 1) nach Fortschaffung des gemeinsamen Faktors k der n:

$$i\ g + h = 0$$

also

$$n_1 = n_4 = n_5 = 0,\ n_2 = i,\ n_3 = 1$$

und:

$$n_3^{\,2} - 4\ (n_1\ n_5 + n_2\ n_4) = 1$$

Es ist demnach schon zur Reduction eine Transformation der Determinante 1 genügend.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn eine Transformation mit einem Repräsentanten der 4. Grundform identisch sein soll. Als Bedingung hierfür findet man;

$$n_1 = n_2 = n_4 = 0,\ n_3 = k,\ n_5 = i\ k$$

Eliminirt man den gemeinsamen Faktor k der n, so wird die Gleichung 1) gleich:

$$h + i\ (h^2 - gg^1) = 0$$

Auch hier ist:

$$n_3^{\,2} - 4\ (n_1\ n_5 + n_2\ n_4) = 1$$

Eine lineare Transformation ändert aber eine Θ-Function abgesehen von einer Exponentialgrösse, nur um eine multiplicative Constante (Königsberger: Transf. 2. Grades Abelscher Funct. Crelle Bd. 67 pag. 66.)

Daher kann eine Transformation, die hyperelliptische Functionen auf elliptische reducirt, selbst kein Repräsentant der 3. und 4. Grundform sein.

Ist k eine Primzahl, so findet man die Anzahl der äquivalenten Transformationen, die hyperelliptische Functionen auf elliptische reduciren, indem man die Anzahl der linearen Transformationen sucht, die mit den obigen Transformationen componirt alle Transformationen derselben Klasse mit derselben Eigenschaft liefern. Substituirt man die Werte, die die Transformationscoefficienten annehmen, wenn die Transformation mit einer der durch obige vier Grundformen repräsentirten Klassen äquivalent ist, in die Gleichungen 4) und setzt:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1\,\delta_2 - \gamma_2\,\delta_1 = \nu_1\\
&\alpha_1\,\gamma_2 - \alpha_2\,\gamma_1 = \nu_2\\
&\alpha_1\,\delta_2 - \alpha_2\,\delta_1 = \frac{1-\nu_3}{2}\\
&\beta_1\,\gamma_2 - \beta_2\,\gamma_1 = \frac{1+\nu_3}{2}\\
&\delta_1\,\beta_2 - \delta_2\,\beta_1 = \nu_4\\
&\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1 = \nu_5
\end{aligned}
\qquad 14)
$$

so nehmen diese in den vier verschiedenen Fällen die Gestalt an:

$$
\text{I.}\quad
\begin{aligned}
&k^2\,\nu_1 = n_1\\
&k\,\nu_2 = n_2\\
&k\,\frac{1-\nu_3}{2} = \frac{k-n_3}{2}\\
&k\,\frac{1+\nu_3}{2} = \frac{k+n_3}{2}\\
&k\,\nu_4 = n_4\\
&\nu_5 = n_5
\end{aligned}
\qquad
\text{II.}\quad
\begin{aligned}
&k\,\nu_1 = n_1\\
&\nu_2 = n_2\\
&k\,\frac{1-\nu_3}{2} = \frac{k-n_3}{2}\\
&k\,\frac{1+\nu_3}{2} = \frac{k+n_3}{2}\\
&k\,{}^2\nu_4 = n_4 + i\,n_1\\
&k\,\nu_5 = n_5 - i\,n_2
\end{aligned}
$$

$$
\text{III.}\quad
\begin{aligned}
&k\,\nu_1 = n_1\\
&k^2\,\nu_2 = n_2 + i^2\,n_4 - i\,n_3 + i^1\,n_4\\
&k\,\frac{1-\nu_3}{2} = \frac{k-n_3}{2} + i\,n_4\\
&k\,\frac{1+\nu_3}{2} = \frac{k+n_3}{2} - i\,n_4\\
&\nu_4 = n_4\\
&k\,\nu_5 = n_5 - i^1\,n_4
\end{aligned}
$$

IV.
$$\begin{aligned}
&\nu_1 = n_1\\
&k\,\nu_2 = n_2 + i^1\, n_1\\
&k\,\frac{1-\nu_3}{2} = \frac{k-n_3}{2} - i\, n_1\\
&k\,\frac{1+\nu_3}{2} = \frac{k+n_3}{2} + i\, n_1\\
&k\,\nu_4 = n_4 + i^{11}\, n_1\\
&k^2\,\nu_5 = n_5 - i\, n_3 - i^1\, n_4 + (i^2 - i^1\, i^{11})\, n_1 - i^{11}\, n_2.
\end{aligned}$$

In jedem Falle sind die ν durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt, da, wie bereits nachgewiesen ist, i, i^1, i^{11} durch die n immer eindeutig bestimmt sind.

Aehnliche Relationen zwischen den ν und den n ergeben die Gleichungen 6), in denen aber

15)
$$\begin{aligned}
&\gamma_3\,\delta_0 - \gamma_0\,\delta_3 = \nu_1\\
&\alpha_3\,\gamma_0 - \alpha_0\,\gamma_3 = \nu_2\\
&\alpha_0\,\delta_3 - \alpha_3\,\delta_0 = \frac{1+\nu_3}{2}\\
&\beta_0\,\gamma_3 - \beta_3\,\gamma_0 = \frac{1-\nu_3}{2}\\
&\beta_0\,\delta_3 - \beta_3\,\delta_0 = \nu_4\\
&\alpha_3\,\beta_0 - \alpha_0\,\beta_3 = \nu_5
\end{aligned}$$

zu setzen ist.

Im Allgemeinen giebt es, wenn solche lineare Transformationen, deren Coefficienten nach dem Modul 2 congruent sind, nicht als wesentlich verschieden angesehen werden, 720 wesentlich verschiedene lineare Transformationen (Hermite pag. 27). Die Coefficienten der linearen Transformationen sind aber durch die Gleichungen 14) und 15) weiteren Bedingungen unterworfen. Die Anzahl dieser verschiedenen Transformationen wird somit gleich sein der Anzahl der verschiedenen Lösungen der Gleichungen 14) und 15)

Da die Summe der 3. und 4. Gleichung von 14) gleich ist:

$$\frac{1-\nu_3}{2} + \frac{1+\nu_3}{2} = 1$$

so muss, wenn die Grösse linker Hand congruent Null nach dem Modull 2 ist, die andere congruent Eins sein. Nimmt man an:

$$\frac{1+\nu_3}{2} \equiv 1 \pmod 2$$

so kann dieser Congruenz durch sechs Annahmen über die Grössen β_1, β_2, γ_1, γ_2, genügt werden, nämlich:

$$\begin{array}{llll} \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv 0; & \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv 0; \\ \gamma_1 \equiv 0, & \gamma_2 \equiv 1; & \gamma_1 \equiv 1, & \gamma_2 \equiv 1; \\ \beta_1 \equiv 0, & \beta_2 \equiv 1: & \beta_1 \equiv 0, & \beta_2 \equiv 1; \\ \gamma_1 \equiv 1, & \gamma_2 \equiv 0; & \gamma_1 \equiv 1, & \gamma_2 \equiv 1; \\ \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv 1; & \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv 1; \\ \gamma_1 \equiv 0, & \gamma_2 \equiv 1; & \gamma_1 \equiv 1, & \gamma_2 \equiv 0; \end{array}$$

Durch Festsetzung der Grössen β_1, β_2, γ_1, γ_2 sind die übrigen Grössen durch die Gleichungen 14) eindeutig bestimmt. Ebenso besitzen die Gleichungen 15) sechs verschiedene Lösungen.

Es giebt somit 36 lineare Transformationen.

Sind a_1, b_1, c_1, d_1; a_2, b_2, c_2, d_2 und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$ zwei ganzzahlige Lösungen der Gleichungen 4), so wird durch die erste Transformation:

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{p},\mathfrak{q},}(x, y, g, h, g^1) = e^{i\pi(z_0 z_3 + G z_3^2)} \vartheta_{\mu, q}(X, G) \times e^{i\pi(z_1 z_2 + G^1 z_2^2)} \vartheta_{\nu, p}(Y^1 G^1)$$

und durch die zweite:

$$\mathfrak{T}'_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{p},\mathfrak{q},}(x, y, g, h, g^1) = e^{i\pi(\mathfrak{z}_0 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{G}\mathfrak{z}_3^2)} \vartheta_{\mu^1, q^1}(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}^1) \times e^{i\pi(\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{G}^1 \mathfrak{z}_2^2)} \vartheta_{\nu^1, p^1}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}^1)$$

worin, wenn k eine ungrade Zahl ist, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit μ, ν, p, q resp. μ^1, ν^1, p^1, q^1 durch die Congruenzen verbunden sind:

16.
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{m} \equiv \mu a_0 + \nu a_1 + p a_2 + q a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2 \\ \mathfrak{n} \equiv \mu b_0 + \nu b_1 + p b_2 + q b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2 \\ \mathfrak{p} \equiv \mu c_0 + \nu c_1 + p c_2 + q c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2 \\ \mathfrak{q} \equiv \mu d_0 + \nu d_1 + p d_2 + q d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2 \end{array}\right\} \text{(mod. 2)}$$

und:

17.
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{m} \equiv \mu^1 \mathfrak{a}_0 + \nu^1 \mathfrak{a}_1 + p^1 \mathfrak{a}_2 + q^1 \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{n} \equiv \mu^1 \mathfrak{b}_0 + \nu^1 \mathfrak{b}_1 + p^1 \mathfrak{b}_2 + q^1 \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_0 \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{p} \equiv \mu^1 \mathfrak{c}_0 + \nu^1 \mathfrak{c}_1 + p^1 \mathfrak{c}_2 + q^1 \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{q} \equiv \mu^1 \mathfrak{d}_0 + \nu^1 \mathfrak{d}_1 + p^1 \mathfrak{d}_2 + q^1 \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \end{array}\right\} \text{(mod. 2)}$$

Die Modul G, H, G¹ sind mit den Perioden $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$; $\Upsilon_0, \Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ durch die Gleichungen verbunden:

$$G = \frac{\Omega_3 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_3}{\Omega_0 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_0}, \quad H = \frac{\Omega_2 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_2}{\Omega_0 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_0},$$

$$G^1 = \frac{\Omega_0 \Upsilon_2 - \Omega_2 \Upsilon_0}{\Omega_0 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_0}$$

Aehnliche Gleichungen bestehen zwischen den Modul und Perioden der ursprünglichen Θ-Functionen, nämlich:

$$g = \frac{\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3}{\omega_0 v_1 - \omega_1 v_0}, \quad h = \frac{\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2}{\omega_0 v_1 - \omega_1 v_0}, \quad g^1 = \frac{\omega_0 v_2 - \omega_2 v_0}{\omega_0 v_1 - \omega_1 v_0}$$

Ausserdem haben die Perioden noch den Gleichungen zu genügen:

18. $\Omega_0 \Upsilon_3 - \Omega_3 \Upsilon_0 + \Omega_1 \Upsilon_2 - \Omega_2 \Upsilon_1 = 0$

19. $\omega_0 v_3 - \omega_3 v_0 + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 = 0$

Aus $H = 0$ folgt:

$$\Omega_2 \Upsilon_1 - \Omega_1 \Upsilon_2 = 0$$

daher:

$$\frac{\Upsilon_1}{\Omega_1} = \frac{\Upsilon_2}{\Omega_2}$$

Ferner muss wegen Gleichung 18) sein:

$$\Omega_0 \Upsilon_3 - \Omega_3 \Upsilon_0 = 0$$

also auch:

$$\frac{\Upsilon_0}{\Omega_0} = \frac{\Upsilon_3}{\Omega_3}$$

Somit wird:

$$G = \frac{\Omega_3}{\Omega_0} = \frac{\Upsilon_3}{\Upsilon_0}$$

und;

$$G^1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$$

Zwischen den Perioden der ursprünglichen und transformirten Θ-Functionen bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= a_0 \Omega_0 + a_1 \Omega_1 + a_2 \Omega_2 + a_3 \Omega_3 \\
\omega_1 &= b_0 \Omega_0 + b_1 \Omega_1 + b_2 \Omega_2 + b_3 \Omega_3 \\
\omega_2 &= c_0 \Omega_0 + c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 \\
\omega_3 &= d_0 \Omega_0 + d_1 \Omega_1 + d_2 \Omega_2 + d_3 \Omega_3 \\
v_0 &= a_0 \Upsilon_0 + a_1 \Upsilon_1 + a_2 \Upsilon_2 + a_3 \Upsilon_3 \\
v_1 &= b_0 \Upsilon_0 + b_1 \Upsilon_1 + b_2 \Upsilon_2 + b_3 \Upsilon_3 \\
v_2 &= c_0 \Upsilon_0 + c_1 \Upsilon_1 + c_2 \Upsilon_2 + c_3 \Upsilon_3 \\
v_3 &= d_0 \Upsilon_0 + d_1 \Upsilon_1 + d_2 \Upsilon_2 + d_3 \Upsilon_3
\end{aligned}$$

(Hermite pag. 3.)

Setzt man:

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} = \Delta$$

nnd bezeichnet die Unterdeterminanten von a_0 mit A_0 etc. so ist:

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0 A_0 + \omega_1 B_0 + \omega_2 C_0 + \omega_3 D_0}{\Delta}$$

Entwickelt man die Unterdeterminanten nach der Verticalreihe mit dem Index 0, so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen 7):

$$\Omega_0 = \frac{k}{\Delta} (d_3 \omega_0 + c_3 \omega_1 - b_3 \omega_2 - a_3 \omega_3)$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich :

$$\Omega_1 = \frac{k}{\Delta} (d_2 \omega_0 + c_2 \omega_1 - b_2 \omega_2 - a_2 \omega_2)$$

$$\Omega_2 = -\frac{k}{\Delta} (d_1 \omega_0 + c_1 \omega_1 - b_1 \omega_2 - a_1 \omega_3)$$

$$\Omega_3 = -\frac{k}{\Delta} (d_0 \omega_0 + c_0 \omega_1 - b_0 \omega_2 - a_0 \omega_3)$$

$$\Upsilon_0 = \frac{k}{\Delta} (d_3 v_0 + c_3 v_1 - b_3 v_2 - a_3 v_3)$$

$$\Upsilon_1 = \frac{k}{\Delta} (d_2 v_0 + c_2 v_1 - b_2 v_2 - a_2 v_3)$$

$$\Upsilon_2 = -\frac{k}{\Delta} (d_1 v_0 + c_1 v_1 - b_1 v_2 - a_1 v_3)$$

$$\Upsilon_3 = -\frac{k}{\Delta} (d_0 v_0 + c_0 v_1 - b_0 v_2 - a_0 v_3)$$

Werden diese Ausdrücke für Ω und Υ in:

$$G = \frac{\Omega_3}{\Omega_0} = \frac{\Upsilon_3}{\Upsilon_0} \text{ und } G^1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$$

eingesetzt, so nehmen G und G^1 die Werte an:

20)

$$G = -\frac{d_0 \omega_0 + c_0 \omega_1 - b_0 \omega_2 - a_0 \omega_3}{d_3 \omega_0 + c_3 \omega_1 - b_3 \omega_2 - a_3 \omega_3}$$

$$G = -\frac{d_0 v_0 + c_0 v_1 - b_0 v_2 - a_0 v_3}{d_3 v_0 + c_3 v_1 - b_3 v_2 - a_3 v_3}$$

und

21)

$$G^1 = -\frac{d_1 \omega_0 + c_1 \omega_1 - b_1 \omega_2 - a_1 \omega_3}{d_2 \omega_0 + c_2 \omega_1 - b_2 \omega_2 - a_2 \omega_2}$$

$$G^1 = -\frac{d_1 v_0 + c_1 v_1 - b_1 v_2 - a_1 v_3}{d_2 v_0 + c_2 v_1 - b_2 v_2 - a_2 v_3}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen d_0, so fällt auch d_3 heraus, und es wird:

$$G = -\frac{c_0(\omega_1 v_0 - v_1 \omega_0) - b_0(\omega_2 v_0 - v_2 \omega_0) - a_0(\omega_3 v_0 - v_3 \omega_0)}{c_3(\omega_1 v_0 - v_1 \omega_0) - b_3(\omega_2 v_0 - v_2 \omega_0) - a_3(\omega_3 v_0 - v_3 \omega_0)}$$

$$G^1 = -\frac{c_1(\omega_1 v_0 - v_1 \omega_0) - b_1(\omega_2 v_0 - v_2 \omega_0) - a_1(\omega_3 v_0 - v_3 \omega_0)}{c_2(\omega_1 v_0 - v_1 \omega_0) - b_2(\omega_2 v_0 - v_2 \omega_0) - a_2(\omega_3 v_0 - v_3 \omega_0)}$$

Durch Division des Zählers und Nenners von G und G^1 durch $\omega_1 v_0 - v_1 \omega_0$ werden die mit b und a multiplicirten Faktoren resp. gleich g^1 und h. Somit ist:

22)
$$G = -\frac{c_0 - b_0 g^1 - a_0 h}{c_3 - b_3 g^1 - a_3 h}$$
$$G^1 = -\frac{c_1 - b_1 g^1 - a_1 h}{c_2 - b_2 g^1 - a_2 h}$$

Werden aber aus den Gleichungen 20) und 21) c_0, c_3 resp. c_1, c_2 eliminirt, so ergiebt sich:

23)
$$G = -\frac{d_0 - b_0 h - a_0 g}{d_3 - b_3 h - a_3 g}$$
$$G^1 = -\frac{d_1 - b_1 h - a_1 g}{d_2 - b_2 h - a_2 g}$$

Es lassen sich nun vier Zahlen ϱ, σ, τ, φ immer so finden, dass ist:

$$\mathfrak{a}_1 = \varrho\, a_1 + \sigma\, a_2, \qquad \mathfrak{a}_2 = \tau\, a_1 + \varphi\, a_2,$$
$$\mathfrak{b}_1 = \varrho\, b_1 + \sigma\, b_2, \qquad \mathfrak{b}_2 = \tau\, b_1 + \varphi\, b_2,$$

Geht man mit diesen Werten von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ in die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 = \frac{k - n_3}{2}$$
$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_1 = n_1$$

und eliminirt aus beiden einmal $\mathfrak{b}_2$, das andere Mal d_1, so erhält man:

$$\mathfrak{b}_1 = \varrho\, d_1 + \sigma\, d_2 \text{ und } \mathfrak{b}_2 = \tau\, d_1 + \varphi\, d_2$$

Aus der 2. und 4. Gleichung von 4), für die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, c_1; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, c_2 ebenfalls eine Lösung ist, folgt:

$$c_1 = \varrho\, c_1 + \sigma\, c_2, \qquad c_2 = \tau\, c_1 + \varphi\, c_2$$

Setzt man die Werte von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, c_1, $\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, c_2, $\mathfrak{d}_2$ in die zweite Gleichung 22) ein, so wird, wenn für die Transformation $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, c_1, \mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, c_2, \mathfrak{d}_2$ der Modul G^1 in $\mathfrak{G}^1$ übergeht:

$$\mathfrak{G}^1 = -\frac{\varrho\, c_1 + \sigma\, c_2 - (\varrho\, b_1 + \sigma\, b_2)\, g^1 - (\varrho\, a_1 + \sigma\, a_2)\, h}{\tau\, c_1 + \varphi\, c_2 - (\tau\, b_1 + \varphi\, b_2)\, g^1 - (\tau\, a_1 + \varphi\, a_2)\, h}$$

gleich:

$$\mathfrak{G}^1 = -\frac{\varrho\,(c_1 - b_1 g^1 - a_1 h) + \sigma\,(c_2 - b_2 g^1 - a_2 h)}{\tau\,(c_1 - b_1 g^1 - a_1 h) + \varphi\,(c_2 - b_2 g^1 - a_2 h)}$$

daher:

$$24) \qquad \mathfrak{G}^1 = \frac{\varrho\ G^1 - \sigma}{\varphi - \tau\ G^1}$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus der ersten Gleichung 22), wenn r, s, t, v, die ϱ, σ, τ, φ entsprechenden Substitutionscoefficienten sind:

$$25) \qquad \mathfrak{G} = \frac{r\ G - s}{v - t\ G}$$

Eine ebenso einfache Beziehung besteht zwischen den Argumenten der einfachen ϑ-Functionen für zwei verschiedene Lösungen der Gleichungen 4) und 6).

Es ist;

$$\begin{aligned} X &= (a_0 + a_3\ G)\ x + (b_0 + b_3\ G)\ y \\ Y &= (a_1 + a_2\ G^1)\ x + (b_1 + b_2\ G^1)\ y \\ \mathfrak{X} &= (a_0 + a_3\ \mathfrak{G})\ x + (b_0 + b_3\ \mathfrak{G})\ y \\ \mathfrak{Y} &= (a_1 + a_2\ \mathfrak{G}^1)\ x + (b_1 + b_2\ \mathfrak{G}^1)\ y \end{aligned}$$

Werden zunächst in $\mathfrak{Y}$ für a_1, b_1, a_2, b_2 die Werte in a_1, b_1, a_2 b_2 substituirt, so ergiebt sich;

$$\mathfrak{Y} = \left\{\varrho\ a_1 + \sigma\ a_2 + (\tau\ a_1 + \varphi\ a_2)\frac{\varrho\ G^1 - \sigma}{\varphi - \tau\ G^1}\right\} x + \left\{\varrho\ b_1 + \sigma\ b_2 + (\tau\ b_1 + \varphi\ b_2)\frac{\varrho\ G^1 - \sigma}{\varphi - \tau\ G^1}\right\} y$$

gleich:

$$\mathfrak{Y} = \frac{(\varrho\ a_1 + \sigma\ a_2)(\varphi - \tau\ G^1) + (\tau\ a_1 + \varphi\ a_2)(\varrho\ G^1 - \sigma)}{\varphi - \tau\ G^1}\ x + \frac{(\varrho\ b_1 + \sigma\ b_2)(\varphi - \tau\ G^1) + (\tau\ b_1 + \varphi\ b_2)(\varrho\ G^1 - \sigma)}{\varphi - \tau\ G^1}\ y$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{a_1 + a_2\ G^1}{\varphi - \tau\ G^1}\ x + \frac{b_1 + b_2\ G^1}{\varphi - \tau\ G^1}\ y$$

somit:

$$26) \qquad \mathfrak{Y} = \frac{Y}{\varphi - \tau\ G^1}$$

In gleicher Weise ist:

$$27) \qquad \mathfrak{X} = \frac{X}{\varphi - \tau\ G^1}$$

Die Relationen 24), 26) und 25), 27) stimmen mit den Bedingungen überein, denen die Modul und Argumente zweier elliptischer ϑ-Functionen genügen müssen, damit die eine eine Transformation der anderen ist (Königsberger: Transformation der ellipt. Functionen pag. 23), falls die Substitutionscoefficienten ϱ, σ, τ, φ und r, s, t, v ganze Zahlen sind.

Es ist:

$$\varrho = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n_5}, \qquad \tau = \frac{a_2 b_2 - a_2 b_2}{n_5},$$

$$\sigma = \frac{a_1 b_1 - a_1 b_1}{n_5}, \qquad \varphi = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{n_5}.$$

Diese Ausdrücke für ϱ, σ, τ, φ können in eine andere Gestalt gebracht werden. Aus den Gleichungen γ) und δ) von 8) und 9) folgt:

$$\frac{1}{k}\left(-a_1 n_4 + d_1 n_5 + b_1 \frac{k + n_3}{2}\right) = b_1$$

$$\frac{1}{k}\left(-c_1 n_5 + b_1 n_2 + a_1 \frac{k - n_3}{2}\right) = a_1$$

$$\frac{1}{k}\left(-a_2 n_4 + d_2 n_5 + b_2 \frac{k + n_3}{2}\right) = b_2$$

$$\frac{1}{k}\left(-c_2 n_5 + b_2 n_2 + a_2 \frac{k - n_3}{2}\right) = a_2$$

Werden für a_1, b_1, a_2, b_2 in ϱ, σ, τ, φ die linken Seiten dieser Gleichungen substituirt, so wird zunächst:

$$\varrho = \frac{1}{n_5 k}\left\{a_1\left(-a_2 n_4 + d_2 n_5 + b_2 \frac{k + n_3}{2}\right) - b_1\left(-c_2 n_5 + b_2 n_2 + a_2 \frac{k - n_3}{2}\right)\right\}$$

Die Gleichungen 7), 8), 9), 10) bestehen aber auch für die Lösung $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, daher ist auch:

$$\frac{1}{k}\left(-\mathfrak{a}_1 n_4 + \mathfrak{d}_1 n_5 + \mathfrak{b}_1 \frac{k + n_3}{2}\right) = \mathfrak{b}_1$$

$$\frac{1}{k}\left(-\mathfrak{c}_1 n_5 + \mathfrak{b}_1 n_2 + \mathfrak{a}_1 \frac{k - n_3}{2}\right) = \mathfrak{a}_1$$

$$\frac{1}{k}\left(-\mathfrak{a}_2 n_4 + \mathfrak{d}_2 n_5 + \mathfrak{b}_2 \frac{k + n_3}{2}\right) = \mathfrak{b}_2$$

$$\frac{1}{k}\left(-\mathfrak{c}_2 n_5 + \mathfrak{b}_2 n_2 + \mathfrak{a}_2 \frac{k - n_3}{2}\right) = \mathfrak{a}_2$$

Substituirt man nun in:

$$\varrho = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n_5}$$

für $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ diese Werte, so wird:

$$\varrho = \frac{1}{n_5 k}\left\{b_2\left(-\mathfrak{c}_1 n_5 + \mathfrak{b}_1 n_2 + \mathfrak{a}_1 \frac{k - n_3}{2}\right) - a_2\left(-\mathfrak{a}_1 n_4 + \mathfrak{d}_1 n_5 + \mathfrak{b}_1 \frac{k + n_3}{2}\right)\right\}$$

Die Addition dieser so erhaltenen Werte von ϱ ergiebt

$$2\,\varrho = \frac{1}{n_5\,k}\left\{\left(a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2\right)n_5 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,k\right\}$$

daher:

$$\varrho = \frac{1}{k}\,(a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2)$$

Analog erhält man:

$$\sigma = \frac{1}{k}\,(a_1\,d_1 + b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - b_1\,a_1)$$

$$\tau = \frac{1}{k}\,(a_2\,d_2 + b_2\,c_2 - c_2\,b_2 - b_2\,a_2)$$

$$\varphi = \frac{1}{k}\,(a_2\,d_1 + b_2\,c_1 - c_2\,b_1 - b_2\,a_1)$$

Damit ϱ, σ, τ, φ ganze Zahlen sind, müssen

$a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2$
$a_1\,d_1 + b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - b_1\,a_1$
$a_2\,d_2 + b_2\,c_2 - c_2\,b_2 - b_2\,a_2$
$a_2\,d_1 + b_2\,c_1 - c_2\,b_1 - b_2\,a_1$

durch k teilbar sein.

Die Gleichung 8) α) in den deutschen Buchstaben lässt sich schreiben:

$$b_1\,n_1 + c_1\,n_4 - b_1\,\frac{k - n_3}{2} = -\,b_1\,k$$

Substituirt man aus den Gleichungen 4) für die n ihre Werte in den lateinischen Buchstaben, so erhält man:
$b_1\,(c_1\,d_2 - c_2\,d_1) + c_1\,(d_1\,b_2 - d_2\,b_1) - b_1\,(a_1\,d_2 - a_2\,d_1) = -\,b_1\,k$
Auf der linken Seite $a_1 d_1 d_2$ addirt und subtrahirt, giebt:

28) $d_2\,(b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - b_1\,a_1 + a_1\,d_1) - d_1\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2 + a_1\,d_2) = -\,b_1\,k.$

Auf dieselbe Weise lassen sich aus den andern drei Gleichungen von 8) und den Gleichungen 9) in den deutschen Buchstaben die Gleichungen ableiten;

29) $c_1\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2 + a_1\,d_2) - c_2\,(b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - b_1\,a_1 + a_1\,d_1) = c_1\,k$
30) $b_2\,(b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - b_1\,a_1 + a_1\,d_1) - b_1\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2 + a_1\,d_2) = -\,b_1\,k$
31) $a_2\,(b_1\,c_1 - c_1\,b_1 - a_1\,d_1 + b_1\,a_1) - a_1\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - b_1\,a_2 + a_1\,d_2) = -\,a_1\,k$
32) $d_2\,(b_2\,c_1 - c_2\,b_1 - b_2\,a_1 + a_2\,d_1) - d_1\,(b_2\,c_2 - c_2\,b_2 - b_2\,a_2 + a_2\,d_2) = -\,b_2\,k$

33) $c_1 (b_2 c_2 - c_2 b_2 - b_2 a_2 + a_2 d_2) - c_2 (b_2 c_1 - c_2 b_1 - b_2 a_1 + a_2 d_1) = c_2 k$

34) $b_2 (b_2 c_1 - c_2 b_1 - b_2 a_1 + a_2 d_1) - b_1 (b_2 c_2 - c_2 b_2 - b_2 a_2 + a_2 d_2) = - b_2 k$

35) $a_2 (b_2 c_1 - c_2 b_1 - a_2 d_1 + b_2 a_1) - a_1 (b_2 c_2 - c_2 b_2 - b_2 a_2 + a_2 d_2) = - a_2 k$

Die Multiplication der Gleichung 28) mit c_2 und der Gleichung 29) mit d_2 und die Addition beider liefert:

36) $n_1 (b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2) = k (c_1 d_2 - c_2 b_1)$

Ebenso ergeben die Gleichungen 28) und 30), 28) und 31), 29) und 31) und endlich 30) und 31):

37) $n_4 (b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2) = k (c_1 d_2 - c_2 b_1)$

38) $\frac{k - n_3}{2} (b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2) = k (a_1 d_2 - a_2 b_1)$

39) $n_2 (b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2) = k (a_1 c_2 - a_2 c_1)$

40) $n_5 (b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2) = k (a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind durch k teilbar, darum müssen es auch die linken sein. Die n können nicht sämmtlich k enthalten, weil sie keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Es muss daher:

$$b_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 d_2$$

durch k teilbar sein. Somit ist ϱ eine ganze Zahl.

Auf dieselbe Weise lässt sich mit Hilfe der Gleichungen 28) — 35) die Ganzzahligkeit von σ, τ, φ nachweisen.

Um den Grad der Transformation festzustellen, geht man mit dem Werte der Lösung $a_1, b_1, c_1, b_1 ; a_2, b_2, c_2, b_2$ in die Gleichung:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = n_5$$

Man erhält:

$$(\varrho \varphi - \sigma \tau) (a_1 b_2 - a_2 b_1) = n_5$$

Da nun auch:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = n_5$$

so muss sein:

$$\varrho \varphi - \sigma \tau = 1$$

Die Transformation ist somit eine lineare.

Damit nun

$$\vartheta_{\nu^1, p^1} (\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}^1) \text{ und } \vartheta_{\mu^1, q^1} (\mathfrak{X}, \mathfrak{G})$$

durch diese lineare Transformation in

$$\vartheta_{\nu, p} (Y, G^1) \text{ resp. } \vartheta_{\mu, q} (X, G)$$

übergeht, müssen ν, p, μ, q durch ν^1, p^1, μ^1, q^1 und die Transformations-Coefficienten ausdrückbar sein. Aus den Congruenzen 16) und 17) folgt:

$$\mu a_0 + \nu a_1 + p a_2 + q a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2 \equiv \mu^1 a_0 + \nu^1 a_1 + p^1 a_2 + q^1 a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2 \pmod 2$$

Führt man in die rechte Seite dieser Congruenz die Substitutionen ein:

$$\mathfrak{a}_0 = r\,a_0 + s\,a_3, \qquad \mathfrak{a}_1 = \varrho\,a_1 + \sigma\,a_2,$$
$$\mathfrak{a}_3 = t\,a_0 + v\,a_3, \qquad \mathfrak{a}_2 = \tau\,a_1 + \varphi\,a_2,$$

so geht sie über in:

$$\equiv \mu^1 (r\,a_0 + s\,a_3) + \nu^1 (\varrho\,a_1 + \sigma\,a_2) + p^1 (\tau\,a_1 + \varphi\,a_2) + q^1 (t\,a_0 + v\,a_3) + (r\,a_0 + s\,a_3)(t\,a_0 + v\,a_3) + (\varrho\,a_1 + \sigma\,a_2)(\tau\,a_1 + \varphi\,a_2) \pmod 2$$
$$\equiv a_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1) + a_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1) + a_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1) + a_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1) + r\,t\,a_0^2 + (s\,t + r\,v)\,a_0 a_3 + s\,v\,a_3^2 + \varrho\,\tau\,a_1^2 + (\sigma\,\tau + \varrho\,\varphi)\,a_1 a_2 + \sigma\,\varphi\,a_2^2 \pmod 2$$

Nun ist:

$$r\,t\,a_0^2 \equiv r\,t\,a_0 \pmod 2$$
$$s\,v\,a_3^2 \equiv s\,v\,a_3 \pmod 2$$
$$\varrho\,\tau\,a_1^2 \equiv \varrho\,\tau\,a_1 \pmod 2$$
$$\sigma\,\varphi\,a_2^2 \equiv \sigma\,\varphi\,a_2 \pmod 2$$

und:

$$r\,v = 1 + s\,t$$
$$\varrho\,\varphi = 1 + \sigma\,\tau$$

daher:

$$\equiv a_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) + a_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p + \varrho\,\tau) + a_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi) + a_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v) + (1 + 2\,s\,t)\,a_0\,a_3 + (1 + 2\,\sigma\,\tau)\,a_1\,a_2 \pmod 2$$

Da nun:

$$2\,s\,t\,a_0\,a_3 \equiv 2\,\sigma\,\tau\,a_1\,a_2 \equiv 0 \pmod 2$$

ist, so können diese Glieder weggelassen werden, ohne dass dadurch die Congruenz eine Aenderung erleidet. Subtrahirt man nun noch auf beiden Seiten $a_0 a_3 + a_1 a_2$, so ergiebt sich endlich:

41) $\mu\,a_0 + \nu\,a_1 + p\,a_2 + q\,a_3 \equiv a_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) + a_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1 + \varrho\,\tau) + a_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi) + a_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v) \pmod 2$

Aus den übrigen Congruenzen 16) und 17) findet man auf demselben Wege:

42) $\mu\,b_0 + \nu\,b_1 + p\,b_2 + q\,b_3 \equiv b_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) + b_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1 + \varrho\,\tau) + b_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi) + b_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v) \pmod 2$

43) $\mu\,c_0 + \nu\,c_1 + p\,c_2 + q\,c_3 \equiv c_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) + c_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1 + \varrho\,\tau) + c_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi) + c_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v) \pmod 2$

44) $\mu\,d_0 + \nu\,d_1 + p\,d_2 + q\,d_3 \equiv d_0 (r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) + d_1 (\varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1 + \varrho\,\tau) + d_2 (\sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi) + d_3 (s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v) \pmod 2$

Multiplicirt man nun die Gleichung 41) mit d_3, 42) mit c_3, 43) mit $-b_3$ und 44) mit $-a_3$ und addirt sie, so er-

hält man mit Rücksicht auf das Gleichungssystem 2):

$$k\,\mu \equiv k\,(r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t) \pmod 2$$

Da nun k eine ungrade Zahl ist, so kann man diese Congruenz durch k dividiren, und es ist somit:

$$\mu \equiv r\,\mu^1 + t\,q^1 + r\,t \pmod 2$$

Aehnlich ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \nu &\equiv \varrho\,\nu^1 + \tau\,p^1 + \varrho\,\tau \\ p &\equiv \sigma\,\nu^1 + \varphi\,p^1 + \sigma\,\varphi \\ q &\equiv s\,\mu^1 + v\,q^1 + s\,v \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

Diese Congruenzen sind den zwischen den Indices der ursprünglichen und transformirten ϑ-Function bestehenden Gleichungen analog gebildet. (Königsberger: Transformation der elliptischen ϑ-Functionen pag. 24)

Es sind somit alle Bedingungen erfüllt, die zwischen zwei elliptischen ϑ-Functionen bestehen, wenn die eine eine lineare Transformation der anderen ist. Es ist also:

$$e^{i\pi(\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2}\,\vartheta_{\nu^1,\,p^1}(\mathfrak{Y},\,\mathfrak{G}^1) = C\,\vartheta_{\nu,\,p}(Y,\,G^1)$$

Eine ähnliche Gleichung existirt für $\vartheta_{\mu^1,\,q^1}(\mathfrak{X},\,\mathfrak{G})$.

Multiplicire ich nun beide Seiten dieser Gleichung mit $e^{i\pi\,(z_1\,z_2 + z_2^2\,G^1)}$, so wird:

$$e^{i\pi\,[(\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2 + z_1 z_2 + z_2^2 G^1]}\,\vartheta_{\nu^1\,p^1}(\mathfrak{Y},\mathfrak{G}^1) = C\,e^{i\pi\,(z_1 z_2 + z_2^2 G^1)}\,\vartheta_{\nu,\,p}(Y, G^1)$$

Da nun $z_1\,z_2 + z_2^2\,G^1 = z_2\,Y$ ist, so wird:

$(\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2 + z_1\,z_2 + z_2^2\,G^1 = (\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2 + z_2\,Y.$

Nun folgt aus der Gleichung 26)

$$Y = (\varphi - \tau\,G^1)\,\mathfrak{Y},$$

daher: $(\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2 + z_2\,Y = (\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,(\varphi - \tau\,G^1)^2\,\mathfrak{Y}^2 + z_2\,(\varphi - \tau\,G^1)\,\mathfrak{Y}.$

Setzt man für G^1 den aus der Gleichung 24) folgenden Wert ein: nämlich:

$$G^1 = \frac{\sigma + \varphi\,\mathfrak{G}^1}{\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1}$$

so wird:

$$(\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\,Y^2 + z_2\,Y = (\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1)\,\tau\left(\varphi - \tau\frac{\sigma + \varphi\,\mathfrak{G}^1}{\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1}\right)^2\mathfrak{Y}^2 + z_2\left(\varphi - \tau\,\frac{\sigma + \varphi\,\mathfrak{G}^1}{\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1}\right)\mathfrak{Y}$$

$$= \frac{\tau\,\mathfrak{Y}^2 + z_2\,\mathfrak{Y}}{\varrho + \tau\,\mathfrak{G}^1}$$

Ferner ist:

$$z_2 = a_2\, x + b_2\, y$$

Die Coefficienten a_2, b_2 lassen sich aus den Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1 = \varrho\, a_1 + \sigma\, a_2, \qquad \mathfrak{a}_2 = \tau\, a_1 + \varphi\, a_2,$$
$$\mathfrak{b}_1 = \varrho\, b_1 + \sigma\, b_2, \qquad \mathfrak{b}_2 = \tau\, b_1 + \varphi\, b_2,$$

durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, ausdrücken. Substituirt man die sich ergebenden Werte:

$$a_2 = \varrho\, \mathfrak{a}_2 - \tau\, \mathfrak{a}_1,$$
$$b_2 = \varrho\, \mathfrak{b}_2 - \tau\, \mathfrak{b}_1,$$

in z_2, so erhält man:

$$z_2 = (\varrho\, \mathfrak{a}_2 - \tau\, \mathfrak{a}_1)\, x + (\varrho\, \mathfrak{b}_2 - \tau\, \mathfrak{b}_1)\, y$$

gleich:

$$z_2 = \varrho\, \mathfrak{z}_2 - \tau\, \mathfrak{z}_1$$

Daher:

$$(\varrho + \tau\, \mathfrak{G}^1)\, \tau\, Y^2 + z_2\, Y = \frac{\tau\, \mathfrak{Y}^2 + (\varrho\, \mathfrak{z}_2 - \tau\, \mathfrak{z}_1)\, \mathfrak{Y}}{\varrho + \tau\, \mathfrak{G}^1}$$

Da aber:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{G}^1$$

ist, so ergiebt sich schliesslich nach einigen Reductionen

$$(\varrho - \tau\, \mathfrak{G}^1)\, \tau\, Y^2 + z_2\, Y = \mathfrak{z}_1\, \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_2{}^2\, \mathfrak{G}^1$$

Daher ist:

$$e^{i\pi(\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_2{}^2 \mathfrak{G}^1)}\, \vartheta_{\nu^1, p^1}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}^1) = C\, e^{i\pi(z_1 z_2 + z_2{}^2 G^1)}\, \vartheta_{\nu,p}(Y, G^1)$$

Ebenso wird die Relation:

$$e^{i\pi(\mathfrak{z}_0 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_3{}^2 \mathfrak{G})}\, \vartheta_{\mu^1, q^1}(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}) = C^1\, e^{i\pi(z_0 z_2 + z_3{}^2 G)}\, \vartheta_{\mu,q}(X, G)$$

abgeleitet.

Es unterscheiden sich somit die *II*-Functionen mit denselben Jndices für verschiedene Lösungen der Gleichungen 4) und 6) nur um eine multiplicative Constante und können durch lineare Transformationen der einfachen ϑ-Functionen, in deren Product sie zerfallen, auseinander abgeleitet werden.

Die Function *II* (x, y) ist eine ganze homogene Function kten Grades von vier ursprünglichen Θ-Functionen (Hermite pag. 22) Setzt man nun diejenige *II*-Function, die aus Θ_{1111} gebildet ist, gleich Null, so erhält man für jede Transformation, die den Gleichungen 4) und 6) genügt, eine homogene Gleichung kten Grades zwischen den ursprünglichen Θ-Functionen. Diese *II*-Function wird aber gleich Null, wenn man in den ursprünglichen Θ-Functionen die kten Teile der Periodenindices

als Argumente nimmt, wodurch die Argumente der Π-Function gleich den ganzen Perioden werden (Königsberger: Transf. 2. Grades der Abelschen Functionen. Crelle 67 pag. 65).

Es soll nun diese Gleichung zwischen den gegebenen Θ-Functionen mit kten Teilen der Periodenindices als Argumente durch die Coefficienten n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 eine bestimmte sein.

Die Indices dieser Π-Function ergeben sich aus den Congruenzen 16), indem man $\varrho' = \sigma' = p = q = 1$ setzt. Es ist somit:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m} &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_0\,a_3 + a_1\,a_2 \\ \mathfrak{n} &\equiv b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_0\,b_3 + b_1\,b_2 \\ \mathfrak{p} &\equiv c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_0\,c_3 + c_1\,c_2 \\ \mathfrak{q} &\equiv d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_0\,d_3 + d_1\,d_2 \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

Man kann schreiben:

$$\mathfrak{m} \equiv (a_1 + a_2 + a_1\,a_2) + (a_0 + a_3 + a_0\,a_3) \pmod 2$$

Es ist

$$a_1 + a_2 + a_1\,a_2 \equiv 1 \pmod 2$$

ausser wenn a_1 und a_2 gleichzeitig gerade sind. In diesem Falle sind auch $\frac{k - n_3}{2}$, n_2 und n_5 gerade Zahlen. Wenn $\frac{k - n_3}{2}$, n_2, n_5 gerade sind, so kann man aus den Gleichungen δ) von 8) und 9) leicht folgern, dass a_1 und a_2 gerade Zahlen sind, weil $\frac{k + n_3}{2}$ ungrade sein muss; denn:

$$\frac{k - n_3}{2} + \frac{k + n_3}{2} = k$$

und k ist als ungerade vorausgesetzt. Ebenso leicht lässt sich aus den Werten von n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 feststellen, ob b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 gleichzeitig gerade sind oder nicht. Dieselbe Betrachtung ist anwendbar auf die Coefficienten mit den Indices 0 und 3. Somit sind die Indires $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ durch die Werte der n bestimmt; und da sich ausserdem alle Π-Functionen mit denselben Indices für die verschiedenen Lösungen der Gleichungen 4) nur durch einen constanten Faktor unterscheiden, so muss die Gleichung zwischen den gegebenen Θ-Functionen durch die Coefficienten n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 bestimmt sein.

Erhaltene Resultate.

1) Durch das Verschwinden des zweiten Moduls der transformirten Θ-Function werden die Transformationscoefficienten Gleichungen unterworfen, die ganzzahlig lösbar sind.

2) Wenn k eine Primzahl ist, so ist aus den Werten von n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 leicht zu erkennen, welchem Repräsentanten die Transformationen, die hyperelliptische Functionen auf elliptische reduciren, äquivalent sind. Keine dieser Transformationen kann selbst ein Repräsentant sein. Die Anzahl der in eine Klasse gehörenden Transformationen ist 36.

3) Ist k eine beliebige ungrade Zahl, so stehen die Π-Functionen mit demselben Index, die man für verschiedene der in Rede stehenden Transformationen erhält, in dem Zusammenhang, dass sie sich nur durch eine multiplicative Constante unterscheiden und aus einander durch lineare Transformationen derjenigen einfachen ϑ-Functionen entstehen, in deren Product wegen des Verschwindens des mittleren Moduls die transformirte Θ-Function zerfällt.

4) Die Gleichung zwischen den ursprünglichen Θ-Functionen mit k^{ten} Teilen der Periodenindices als Argumente, welche man dadurch erhält, dass die mit Θ_{1111} zusammengesetzte Π-Function mit den Argumenten verschwindet, ist durch die Coefficienten n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 bestimmt.

Lebenslauf.

Ich, Josef Hanel, kath. Confession, bin geboren am 26. März 1857 zu Mährengasse bei Neisse als Sohn des Bauergutsbesitzers S. Hanel zu Mährengasse und seiner Ehefrau Mathilde geb. Krause. Nach Absolvirung der Elementarschule meines Heimathsortes und der Realschule I. Ord. zu Neisse, bezog ich mit dem Zeugniss der Reife im April 1877 die hiesige Universität, um mich dem Studium der Mathemik und Naturwissenschaft zu widmen. Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren und Docenten: Cohn, Dilthey, Dorn, Freudenthal, Galle, Grube, Krause, v. Lasaulx, Liebisch, Meyer, Poleck, Römer, Rosanes, Schottky, Schröter, Weber. Während 5 Semester war ich Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars der Herren Professoren Meyer, Rosanes und Schröter und während eines Semesters arbeitete ich praktisch im physikalischen Institut und im zoologischen Museum, während zwei Semester im mineralogischen Museum. Durch ein Semester nahm ich Teil an dem mineralogischen Collegium. Ferner wurde ich von dem Herrn Minister der geistlichen etc. Angelegenheiten zu der am 28. Februar, 1. und 2. März 1881 abgehaltenen Turnlehrerprüfung zugelassen, in welcher mir die Befähigung zur Leitung der Turn-Uebungen an öffentlichen Unterrichts-Anstalten zuerkannt wurde.

Allen oben genannten Herren Professoren und Docenten, insbesondere den Herren Professoren Dorn, Meyer, Rosanes und Schröter fühle ich mich zu grösstem Danke verpflichtet.

Thesen.

I.

Bei Entwickelung der Theorie der hyperelliptischen Functionen ist von den vierfach periodischen Functionen auszugehen.

II.

Eine Electricitätserregung ist nur durch einen chemischen Process herbeizuführen.

III.

Die Turnspiele sollen einen wesentlichen Bestandtheil des Turnunterrichts an allen Lehranstalten bilden.